Compito di Matematica per la Fisica

Silvia Penati, Carlo Oleari

23/7/2013

1. Calcolare modulo e fase dei seguenti numeri e disegnarli nel piano complesso

- $\left(-1-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{1+i}$
- $e^{\sin(1+i)}$

2. Calcolare il seguente integrale (trasformata di Fourier)

$$f(k)=\int_{-\infty}^{\infty}dx\, e^{ikx}\,\frac{1}{(x+i)^3}$$

3. Calcolare, utilizzando la teoria dei residui e motivando il procedimento, il seguente integrale

$$\int_0^{\infty}dx\,\frac{\log(x^3)}{1+x^2}$$

4. Data la funzione

$$f(z)=\frac{(z-a)\sin\frac{z}{2}}{\sin z},\qquad a\in\mathcal{C}$$

- Si identifichino e si classifichino tutti i punti singolari (non dimenticare la discussione del punto all'infinito) al variare del parametro complesso a.
- Si calcolino i residui nei punti singolari al finito.

5. Sia A l'operatore in $L^2(a,b)$ con $0<a<b$ tale che

$$(Af)(x)=\left[\frac{d^2}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{d}{dx}\right]f(x)$$

definito per ogni funzione f assolutamente continua con $f', f''\in L^2(a,b)$, e tale che

$$af(a)=bf(b)$$

Determinare lo spettro di A.

Suggerimento: risolvere il problema agli autovalori con il cambio di funzione $f(x)=x^{\alpha}g(x)$, per un opportuno valore di α, da determinare. Assicurarsi che la trasformazione sia ben definita nell'intervallo di definizione della funzione.